Logica e Reti Logiche

Raffaella Gentilini

September 2, 2022

Funzioni ed Espressioni Booleane

Funzioni Booleane

Definizione [Funzioni Booleane]

Sia $\mathcal{B} = \langle A = \{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ un'algebra booleana di commutazione. Una funzione booleana a n variabili e' una relazione

$$f : A^n \mapsto A$$

che mette in corrispondenza gli elementi del dominio A^n con gli elementi del codominio A.

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

1. $\forall a \in A$, la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ e' una funzione booleana ad n variabili.

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

1. $\forall a \in A$, la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ e' una funzione booleana ad n variabili.
2. $\forall x_i \in \{x_1 \ldots x_n\}$, la funzione proiezione $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ e' una funzione booleana ad n variabili.

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

1. $\forall a \in A$, la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ e' una funzione booleana ad n variabili.
2. $\forall x_i \in \{x_1 \ldots x_n\}$, la funzione proiezione $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ e' una funzione booleana ad n variabili.
3. se g ed h sono funzioni booleane ad n variabili, allora anche $g + h$, $g \cdot h$ e g' sono funzioni booleane. Infatti:

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

1. $\forall a \in A$, la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ e' una funzione booleana ad n variabili.
2. $\forall x_i \in \{x_1 \ldots x_n\}$, la funzione proiezione $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ e' una funzione booleana ad n variabili.
3. se g ed h sono funzioni booleane ad n variabili, allora anche $g + h$, $g \cdot h$ e g' sono funzioni booleane. Infatti:
   - $(g + h)(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n)$

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

1. $\forall a \in A$, la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ e' una funzione booleana ad n variabili.
2. $\forall x_i \in \{x_1 \ldots x_n\}$, la funzione proiezione $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ e' una funzione booleana ad n variabili.
3. se g ed h sono funzioni booleane ad n variabili, allora anche $g + h$, $g \cdot h$ e g' sono funzioni booleane. Infatti:
   - $(g + h)(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n)$
   - $(g \cdot h)(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \cdot h(x_1, \ldots, x_n)$

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

1. $\forall a \in A$, la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ e' una funzione booleana ad n variabili.
2. $\forall x_i \in \{x_1 \ldots x_n\}$, la funzione proiezione $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ e' una funzione booleana ad n variabili.
3. se g ed h sono funzioni booleane ad n variabili, allora anche $g + h$, $g \cdot h$ e g' sono funzioni booleane. Infatti:
   - $(g + h)(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n)$
   - $(g \cdot h)(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \cdot h(x_1, \ldots, x_n)$
   - $(g')(x_1, \ldots, x_n) = (g(x_1, \ldots, x_n))'$

Funzioni Booleane

Per definire una funzione booleana dal punto di vista operativo si ricorre alle quattro regole seguenti:

1. $\forall a \in A$, la funzione costante $f(x_1, \dots, x_n) = a$ e' una funzione booleana ad n variabili.
2. $\forall x_i \in \{x_1 \dots x_n\}$, la funzione proiezione $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ e' una funzione booleana ad n variabili.
3. se g ed h sono funzioni booleane ad n variabili, allora anche $g + h$, $g \cdot h$ e g' sono funzioni booleane. Infatti:
   - $(g + h)(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$
   - $(g \cdot h)(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$
   - $(g')(x_1, \dots, x_n) = (g(x_1, \dots, x_n))'$
4. non esistono altre funzioni booleane oltre a quelle ottenute dall'applicazione iterativa delle precedenti regole.

Si noti che se $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ e' un'algebra (booleana) di commutazione, allora $A = \{0, 1\}$, e dunque le nostre funzioni booleane (su algebre di commutazione) avranno la forma:

$$f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$$

Si noti che se $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ e' un'algebra (booleana) di commutazione, allora $A = \{0, 1\}$, e dunque le nostre funzioni booleane (su algebre di commutazione) avranno la forma:

$$f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$$

- Il dominio di f ha 2^n elementi e il codominio 2 elementi.

Si noti che se $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ e' un'algebra (booleana) di commutazione, allora $A = \{0, 1\}$, e dunque le nostre funzioni booleane (su algebre di commutazione) avranno la forma:

$$f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$$

- Il dominio di f ha 2^n elementi e il codominio 2 elementi.
- f puo' essere descritta dalla sua tabella di verita' T_f.

Si noti che se $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ e' un'algebra (booleana) di commutazione, allora $A = \{0, 1\}$, e dunque le nostre funzioni booleane (su algebre di commutazione) avranno la forma:

$$f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$$

- Il dominio di f ha 2^n elementi e il codominio 2 elementi.
- f puo' essere descritta dalla sua tabella di verita' T_f.
- La tabella di verita' T_f per la funzione $f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$ contiene una riga per ciascuna configurazione delle n variabili in input (con il relativo valore di output per f).

Tabella di Verita'

x	y	z	$f(x\,y\,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Figure: Funzione booleana sulle variabili x, y, z che vale 1 se e solo se esattamente due variabili valgono 1.

Funzioni Booleana

- Quante sono le possibili funzioni booleane (su un'algebra di commutazione) di n variabili?

Funzioni Booleana

- Quante sono le possibili funzioni booleane (su un'algebra di commutazione) di n variabili?
- Date n variabili si hanno 2^n possibili configurazioni (ovvero tante quante gli elementi di $\{0,1\}^n$).

Funzioni Booleana

- Quante sono le possibili funzioni booleane (su un'algebra di commutazione) di n variabili?
- Date n variabili si hanno 2^n possibili configurazioni (ovvero tante quante gli elementi di $\{0,1\}^n$).
- Quindi, ogni funzione e' definita da un insieme di configurazioni (quelle per cui la funzione assume valore 1).

Funzioni Booleana

- Quante sono le possibili funzioni booleane (su un'algebra di commutazione) di n variabili?
- Date n variabili si hanno 2^n possibili configurazioni (ovvero tante quante gli elementi di $\{0,1\}^n$).
- Quindi, ogni funzione e' definita da un insieme di configurazioni (quelle per cui la funzione assume valore 1).
- Il numero di funzioni di commutazione su n variabili e' dunque pari a 2^{2^n} (e' la cardinalita' dell'insieme delle parti di $\{0,1\}^n$).

Funzioni Booleane- Esempi (I)

Esempi di funzioni booleane di 1 variabile, alcune delle quali hanno una particolare importanza dal punto di vista della realizzazione

x	$f(x)$			
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	costante 0	proiezione di x	negazione di x	costante 1

Funzioni Booleane - Esempi (II)

Esempi di funzioni booleane di 2 variabili, alcune delle quali hanno una particolare importanza dal punto di vista della realizzazione

x	y	f(x y)					
0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
		costante 0	costante 1	proiezione x	proiezione y	negazione x	negazione y

Funzioni Booleane - Esempi (III)

Esempi di funzioni di 2 variabili, alcune delle quali hanno una particolare importanza dal punto di vista della realizzazione

x	y	f(x y)					
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1
		AND	OR	NAND	NOR	EXOR	EQUIV.

Funzioni non completamente specificate

Talvolta una funzione f viene specificata in modo parziale ed in tal caso viene detta funzione non completamente specificata. Due sono i principali motivi per cui tale situazione puo' verificarsi:

Funzioni non completamente specificate

Talvolta una funzione f viene specificata in modo parziale ed in tal caso viene detta funzione non completamente specificata. Due sono i principali motivi per cui tale situazione puo' verificarsi:

1. la natura del problema garantisce che una data combinazione delle variabili di ingresso non possa presentarsi.

Funzioni non completamente specificate

Talvolta una funzione f viene specificata in modo parziale ed in tal caso viene detta funzione non completamente specificata. Due sono i principali motivi per cui tale situazione puo' verificarsi:

1. la natura del problema garantisce che una data combinazione delle variabili di ingresso non possa presentarsi.
2. non ha importanza quale valore assuma la funzione per una data combinazione delle variabili di ingresso.

Funzioni non completamente specificate

Talvolta una funzione f viene specificata in modo parziale ed in tal caso viene detta funzione non completamente specificata. Due sono i principali motivi per cui tale situazione puo' verificarsi:

1. la natura del problema garantisce che una data combinazione delle variabili di ingresso non possa presentarsi.
2. non ha importanza quale valore assuma la funzione per una data combinazione delle variabili di ingresso.

Nel primo caso si dice che la funzione non e' controllabile in corrispondenza di una data combinazione di ingressi, nel secondo caso si dice che la funzione non e' osservabile.

Funzioni non completamente specificate - Esempio

Sia f una funzione di due variabili x_1, x_2 che:

- assume valore 1 se entrambe le variabili valgono 0
- assume valore 0 se le variabili sono diverse

ovvero:

$$(f(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0) \wedge$$

$$\wedge (f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2)$$

x_1	x_2	$f(x_1\ x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	—

Espressioni Booleane

Espressioni Booleane

Un'espressione booleana definita su un insieme di variabili booleane $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e' definita dalle seguenti regole:

Espressioni Booleane

Espressioni Booleane

Un'espressione booleana definita su un insieme di variabili booleane $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e' definita dalle seguenti regole:

- gli elementi del supporto sono espressioni;

Espressioni Booleane

Espressioni Booleane

Un'espressione booleana definita su un insieme di variabili booleane $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e' definita dalle seguenti regole:

- gli elementi del supporto sono espressioni;
- le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono espressioni;

Espressioni Booleane

Espressioni Booleane

Un'espressione booleana definita su un insieme di variabili booleane $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e' definita dalle seguenti regole:

- gli elementi del supporto sono espressioni;
- le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono espressioni;
- se h, g sono espressioni booleane, allora lo sono anche $h + g, h \cdot g, h'$;

Espressioni Booleane

Espressioni Booleane

Un'espressione booleana definita su un insieme di variabili booleane $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e' definita dalle seguenti regole:

- gli elementi del supporto sono espressioni;
- le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono espressioni;
- se h, g sono espressioni booleane, allora lo sono anche $h + g, h \cdot g, h'$;
- non esistono altre espressioni oltre a quelle ottenute applicando iterativamente le regole precedenti.

Notazioni e Convenzioni

Example

Notazioni e Convenzioni

- Definito l'insieme di simboli utilizzato per rappresentare le variabili, si puo' eliminare il simbolo di prodotto logico $\cdot$ nei termini prodotto

Example

Notazioni e Convenzioni

- Definito l'insieme di simboli utilizzato per rappresentare le variabili, si puo' eliminare il simbolo di prodotto logico $\cdot$ nei termini prodotto
- Per le proprieta' dell'algebra booleana si possono anche omettere alcune parentesi, ricordando che il prodotto logico e' prioritario rispetto alla somma logica

Example

Notazioni e Convenzioni

- Definito l'insieme di simboli utilizzato per rappresentare le variabili, si puo' eliminare il simbolo di prodotto logico $\cdot$ nei termini prodotto
- Per le proprieta' dell'algebra booleana si possono anche omettere alcune parentesi, ricordando che il prodotto logico e' prioritario rispetto alla somma logica

Example

- L'espressione $x + (y \cdot z)$ puo' essere scritta come $x + yz$ (elimino il simbolo di prodotto logico $\cdot$ nel termine prodotto $y \cdot z$ ed utilizzo la priorita' di $\cdot$ rispetto a $+$)

Notazioni e Convenzioni

- Definito l'insieme di simboli utilizzato per rappresentare le variabili, si puo' eliminare il simbolo di prodotto logico $\cdot$ nei termini prodotto
- Per le proprieta' dell'algebra booleana si possono anche omettere alcune parentesi, ricordando che il prodotto logico e' prioritario rispetto alla somma logica

Example

- L'espressione $x + (y \cdot z)$ puo' essere scritta come $x + yz$ (elimino il simbolo di prodotto logico $\cdot$ nel termine prodotto $y \cdot z$ ed utilizzo la priorita' di $\cdot$ rispetto a $+$)
- Per la proprieta' associativa, l'espressione $x + (y + z \cdot x)$ puo' essere scritta come $x + y + zy$ (elimino le parentesi per l'associativita' ed il simbolo $\cdot$ nel termine prodotto $z \cdot x$)

Letterali

Letterali

- Letterale: occorrenza di una variabile (in forma naturale o negata) all'interno di un'espressione

Letterali

- Letterale: occorrenza di una variabile (in forma naturale o negata) all'interno di un'espressione
- Ad esempio, l'espressione booleana

$$(x' + y') \cdot (x + x')$$

Letterali

- Letterale: occorrenza di una variabile (in forma naturale o negata) all'interno di un'espressione
- Ad esempio, l'espressione booleana

$$(x' + y') \cdot (x + x')$$

contiene 4 letterali:

Letterali

- Letterale: occorrenza di una variabile (in forma naturale o negata) all'interno di un'espressione
- Ad esempio, l'espressione booleana

$$(x' + y') \cdot (x + x')$$

  contiene 4 letterali:
  - un'occorrenza della variabile x in forma naturale

Letterali

- Letterale: occorrenza di una variabile (in forma naturale o negata) all'interno di un'espressione
- Ad esempio, l'espressione booleana

$$(x' + y') \cdot (x + x')$$

contiene 4 letterali:

  - un'occorrenza della variabile x in forma naturale
  - due occorrenze della variabile x in forma negata (x')

Letterali

- Letterale: occorrenza di una variabile (in forma naturale o negata) all'interno di un'espressione
- Ad esempio, l'espressione booleana

$$(x' + y') \cdot (x + x')$$

contiene 4 letterali:

- un'occorrenza della variabile x in forma naturale
- due occorrenze della variabile x in forma negata (x')
- un'occorrenza della variabile y in forma negata (y')

Valutazione di un'espressione

- Sia e un'espressione boolena sulle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

Valutazione di un'espressione

- Sia e un'espressione boolena sulle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
- Sia $(v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$ una configurazione delle variabili

Valutazione di un'espressione

- Sia e un'espressione boolena sulle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
- Sia $(v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$ una configurazione delle variabili
- Si definisce valutazione dell'espressione e rispetto alla configurazione $(v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$ delle variabili, il procedimento mediante il quale si sostituisce a ciascuna variabile il suo valore e applicando le regole dell'algebra di commutazione si ottiene un valore $v \in \{0, 1\}$ per l'espressione.

Valutazione di un'espressione

- Sia e un'espressione boolena sulle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$,
- Sia $(v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ una configurazione delle variabili
- Si definisce valutazione dell'espressione e rispetto alla configurazione $(v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ delle variabili, il procedimento mediante il quale si sostituisce a ciascuna variabile il suo valore e applicando le regole dell'algebra di commutazione si ottiene un valore $v \in \{0,1\}$ per l'espressione.
- Ripetendo il procedimento per tutte le possibili configurazioni, si ottiene una tabella di verita'

Valutazione di un'espressione

- Sia e un'espressione boolena sulle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
- Sia $(v_1, \ldots, v_n) \in \{0,1\}^n$ una configurazione delle variabili
- Si definisce valutazione dell'espressione e rispetto alla configurazione $(v_1, \ldots, v_n) \in \{0,1\}^n$ delle variabili, il procedimento mediante il quale si sostituisce a ciascuna variabile il suo valore e applicando le regole dell'algebra di commutazione si ottiene un valore $v \in \{0,1\}$ per l'espressione.
- Ripetendo il procedimento per tutte le possibili configurazioni, si ottiene una tabella di verita'
- Ad ogni espressione corrisponde dunque una funzione!

Valutazione di un'espressione: Esempio

Example

- Si consideri l'espressione $e = z(y + x) + xy$

Valutazione di un'espressione: Esempio

Example

- Si consideri l'espressione $e = z(y + x) + xy$
- La valutazione di e per (100) e': $e(100) = 0(0 + 1) + 1 \cdot 0 = 0$

Valutazione di un'espressione: Esempio

Example

- Si consideri l'espressione $e = z(y + x) + xy$
- La valutazione di e per (100) e': $e(100) = 0(0 + 1) + 1 \cdot 0 = 0$
- La valutazione completa determina la tabella di verita della seguente funzione booleana su x, y, z

Valutazione di un'espressione: Esempio

Example

- Si consideri l'espressione $e = z(y + x) + xy$
- La valutazione di e per (100) e': $e(100) = 0(0 + 1) + 1 \cdot 0 = 0$
- La valutazione completa determina la tabella di verita della seguente funzione booleana su x, y, z

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Espressioni e Funzioni

Espressioni e Funzioni

- Come abbiamo visto nella slide precedente, ad una singola espressione corrisponde una singola funzione

Espressioni e Funzioni

- Come abbiamo visto nella slide precedente, ad una singola espressione corrisponde una singola funzione
- Ad una funzione possono invece corrispondere molte espressioni

Espressioni e Funzioni

- Come abbiamo visto nella slide precedente, ad una singola espressione corrisponde una singola funzione
- Ad una funzione possono invece corrispondere molte espressioni
- Due espressioni e_1, e_2 definite sullo stesso insieme di variabili si dicono equivalenti se corrispondono quindi alla stessa funzione (scritto $e_1 \equiv e_2$)

Espressioni e Funzioni

- Come abbiamo visto nella slide precedente, ad una singola espressione corrisponde una singola funzione
- Ad una funzione possono invece corrispondere molte espressioni
- Due espressioni e_1, e_2 definite sullo stesso insieme di variabili si dicono equivalenti se corrispondono quindi alla stessa funzione (scritto $e_1 \equiv e_2$)
- Le trasformazioni eseguite su un'espressione di partenza e_0 utilizzando postulati e proprieta' dell'algebra booleana portano ad espressioni equivalenti

Espressioni Booleane a Confronto

- Nei contesti in cui si utilizza un'algebra booleana, e' fondamentale rappresentare le funzioni booleane mediante buone espressioni

Espressioni Booleane a Confronto

- Nei contesti in cui si utilizza un'algebra booleana, e' fondamentale rappresentare le funzioni booleane mediante buone espressioni
- Un possibile criterio di bonta' consiste nel minimizzare il numero dei letterali presenti in un'espressione.

Espressioni Booleane a Confronto

- Nei contesti in cui si utilizza un'algebra booleana, e' fondamentale rappresentare le funzioni booleane mediante buone espressioni
- Un possibile criterio di bonta' consiste nel minimizzare il numero dei letterali presenti in un'espressione.
- Si tratta dunque di individuare una prima espressione booleana che rappresenti la funzione e cercare quindi un'espressione equivalente migliore (con meno letterali)

Espressioni Booleane a Confronto

- Nei contesti in cui si utilizza un'algebra booleana, e' fondamentale rappresentare le funzioni booleane mediante buone espressioni
- Un possibile criterio di bonta' consiste nel minimizzare il numero dei letterali presenti in un'espressione.
- Si tratta dunque di individuare una prima espressione booleana che rappresenti la funzione e cercare quindi un'espressione equivalente migliore (con meno letterali)
- Espressione di partenza tipiche (da manipolare per minimizzare i letterali) sono le cosidette espressioni in forma canonica.

Espressioni Booleane a Confronto

- Nei contesti in cui si utilizza un'algebra booleana, e' fondamentale rappresentare le funzioni booleane mediante buone espressioni
- Un possibile criterio di bonta' consiste nel minimizzare il numero dei letterali presenti in un'espressione.
- Si tratta dunque di individuare una prima espressione booleana che rappresenti la funzione e cercare quindi un'espressione equivalente migliore (con meno letterali)
- Espressione di partenza tipiche (da manipolare per minimizzare i letterali) sono le cosidette espressioni in forma canonica.
- Le forme canoniche di base sono due, la prima espressa come somma di prodotti (SOP), la seconda come prodotto di somme (POS), entrambe ottenibili dall'applicazione del Teorema di Espansione di Shannon.

Teorema di Espansione di Shannon

Teorema di Espansione di Shannon

Sia $f : B^n \mapsto B$ una funzione booleana di n variabili. Allora, per tutti gli $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$ si ha:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1' \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)$$

Teorema di Espansione di Shannon

Teorema di Espansione di Shannon

Sia $f : B^n \mapsto B$ una funzione booleana di n variabili. Allora, per tutti gli $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$ si ha:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1' \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)$$

e dualmente:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1' + f(1, x_2, \ldots, x_n)) \cdot (x_1 + f(0, x_2, \ldots, x_n))$$

Teorema di Espansione di Shannon

Teorema di Espansione di Shannon

Sia $f : B^n \mapsto B$ una funzione booleana di n variabili. Allora, per tutti gli $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$ si ha:

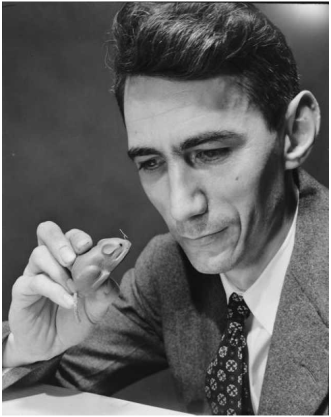
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1' \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)$$

e dualmente:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1' + f(1, x_2, \ldots, x_n)) \cdot (x_1 + f(0, x_2, \ldots, x_n))$$

I termini $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ ed $f(1, x_2, \ldots, x_n)$ sono detti cofattori e sono spesso indicati mediante $f_{x_1'}$ ed f_{x_1}

Claude Shannon with mouse Theseus



Espansione di Shannon: Esempio

Applicando iterativamente il teorema di Shannon alla funzione booleana a 2 variabili $f(x, y)$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= x' \cdot f(0, y) + x \cdot f(1, y) \\
&= x'(y' \cdot f(0,0) + y \cdot f(0,1)) + x(y' \cdot f(1,0) + y \cdot f(1,1)) \\
&= x'y' \cdot f(00) + x'y \cdot f(01) + xy' \cdot f(10) + xy \cdot f(11)
\end{aligned}
$$

In generale, l'applicazione iterativa del teorema di Shannon ad una funzione booleana ad n variabili $f(x_1, \ldots, x_n)$ permette di riscrivere $f(x_1, \ldots, x_n)$ come la somma dei seguenti 2^n termini:

$$
\begin{aligned}
x_1' \ldots x_{n-1}' x_n' \cdot f(0 \ldots 00) + \\
x_1' \ldots x_{n-1}' x_n \cdot f(0 \ldots 01) + \\
\cdots + \\
x_1 \ldots x_{n-1} x_n \cdot f(1 \ldots 11)
\end{aligned}
$$

Espansione di Shannon: Esempio

Applicando iterativamente il teorema di Shannon (nella sua forma duale) alla funzione booleana a 2 variabili $f(x, y)$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
f(xy) &= (x' + f(1y)) \cdot (x + f(0y)) \\
&= (x' + [(y' + f(11)) \cdot (y + f(10))] \cdot (x + [(y' + f(01)) \cdot (y + f(10))] \\
&= (x' + y' + f(11)) \cdot (x' + y + f(10)) \cdot (x + y' + f(01)) \cdot (x + y + f(00))
\end{aligned}
$$

In generale, l'applicazione iterativa del teorema di Shannon (nella sua forma duale) ad una funzione booleana ad n variabili $f(x_1, \ldots, x_n)$ permette di riscrivere $f(x_1, \ldots, x_n)$ come il prodotto dei seguenti 2^n termini:

$$
\begin{aligned}
&(x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n + f(0\ldots00))\cdot \\
&(x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n' + f(0\ldots01))\cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\cdot \quad \ldots \quad \cdot \\
&(x_1' + \cdots + x_{n-1}' + x_n' + f(1\ldots11))
\end{aligned}
$$

Prima Forma Canonica: Mintermini

Prima Forma Canonica: Mintermini

Introduciamo ora la nozione di mintermine, utile nella definizione della prima forma canonica.

Mintermine

Un mintermine su $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine prodotto $y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x_i'$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Prima Forma Canonica: Mintermini

Introduciamo ora la nozione di mintermine, utile nella definizione della prima forma canonica.

Mintermine

Un mintermine su $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine prodotto $y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x_i'$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Dato $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$, possiamo costruire il mintermine $m_{\bar{v}} = y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$, dove $y_i = x_i$ se $v_i = 1$ ed $y_i = x_i'$ se $v_i = 0$ (detto il mintermine corrispondente alla configurazione $\bar{v}$.).

.

Prima Forma Canonica: Mintermini

Introduciamo ora la nozione di mintermine, utile nella definizione della prima forma canonica.

Mintermine

Un mintermine su $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine prodotto $y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x_i'$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Dato $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$, possiamo costruire il mintermine $m_{\bar{v}} = y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$, dove $y_i = x_i$ se $v_i = 1$ ed $y_i = x_i'$ se $v_i = 0$ (detto il mintermine corrispondente alla configurazione $\bar{v}$.).
Il mintermine $m_{\bar{v}}$ e' un'espressione che vale 1 in corrispondenza dell'unica configurazione delle variabili in ingresso $\bar{v}$.

Prima Forma Canonica: Mintermini

Introduciamo ora la nozione di mintermine, utile nella definizione della prima forma canonica.

Mintermine

Un mintermine su $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine prodotto $y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x_i'$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Dato $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0,1\}^n$, possiamo costruire il mintermine $m_{\bar{v}} = y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$, dove $y_i = x_i$ se $v_i = 1$ ed $y_i = x_i'$ se $v_i = 0$ (detto il mintermine corrispondente alla configurazione $\bar{v}$.).
Il mintermine $m_{\bar{v}}$ e' un'espressione che vale 1 in corrispondenza dell'unica configurazione delle variabili in ingresso $\bar{v}$.

Esempio

Sia $\bar{v} = (101)$ una configurazione per le variabili $\{x, y, z\}$. Il minitermine associato alla configurazione $\bar{v} = (101)$ e' l'espressione $m_{\bar{v}} = xy'z$. Si noti che $xy'z$ assume valore 1 soltanto se $x = 1, y = 0$ e $z = 1$, ovvero per la sola configurazione di bit in ingresso $\bar{v} = (101)$.

Prima Forma Canonica (Sum of Products - SOP)

Prima Forma Canonica

Data una funzione booleana $f(x_1, \dots, x_n)$, la sua rappresentazione in prima forma canonica e' data dalla somma di tutti i mintermini su $x_1, \dots, x_n$ associati alle configurazioni di variabili per cui la funzione f vale 1.

Prima Forma Canonica (Sum of Products - SOP)

Prima Forma Canonica

Data una funzione booleana $f(x_1, \ldots, x_n)$, la sua rappresentazione in prima forma canonica e' data dalla somma di tutti i mintermini su $x_1, \ldots, x_n$ associati alle configurazioni di variabili per cui la funzione f vale 1.

- L'applicazione iterativa del teorema di espansione di Shannon ad una funzione f porta alla sua rappresentazione in prima forma canonica

Prima Forma Canonica (Sum of Products - SOP)

Prima Forma Canonica

Data una funzione booleana $f(x_1, \ldots, x_n)$, la sua rappresentazione in prima forma canonica e' data dalla somma di tutti i mintermini su $x_1, \ldots, x_n$ associati alle configurazioni di variabili per cui la funzione f vale 1.

- L'applicazione iterativa del teorema di espansione di Shannon ad una funzione f porta alla sua rappresentazione in prima forma canonica
- In pratica, per ricavare un'espressione in prima forma canonica per una funzione e' sufficiente guardare alle righe della tabella di verita' dove f vale 1!

Prima Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- Si consideri la funzione booleana su x, y, z che vale 1 se esattamente due variabili valgono 1

Prima Forma Canonica: Esempio

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- Si consideri la funzione booleana su x, y, z che vale 1 se esattamente due variabili valgono 1
- L'applicazione del teorema di espansione di Shannon ad $f(x, y, z)$ porta a: $x'y'z' \cdot f(000) + x'y'z \cdot f(001) + x'yz' \cdot f(010) + x'yz \cdot f(011) + xy'z' \cdot f(100) + xy'z \cdot f(101) + xyz' \cdot f(110) + xyz \cdot f(111)$

Prima Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- Si consideri la funzione booleana su x, y, z che vale 1 se esattamente due variabili valgono 1
- L'applicazione del teorema di espansione di Shannon ad $f(x, y, z)$ porta a: $x'y'z' \cdot f(000) + x'y'z \cdot f(001) + x'yz' \cdot f(010) + x'yz \cdot f(011) + xy'z' \cdot f(100) + xy'z \cdot f(101) + xyz' \cdot f(110) + xyz \cdot f(111)$
- Utilizzando il fatto che $f(000) = 0$, $f(001) = 1$, $\ldots$, $f(111) = 0$ (dalla tabella di verita'!) si deduce la seguente espressione in prima forma canonica per f:

$$x'yz + xy'z + xyz'$$

Prima Forma Canonica: Esempio (continua)

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, basta guardare solo alle righe della tabella di verita' dove f vale 1 per costruire la prima forma canonica di f!

Prima Forma Canonica: Esempio (continua)

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, basta guardare solo alle righe della tabella di verita' dove f vale 1 per costruire la prima forma canonica di f!
- I mintemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 1 sono:

Prima Forma Canonica: Esempio (continua)

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, basta guardare solo alle righe della tabella di verita' dove f vale 1 per costruire la prima forma canonica di f!
- I mintemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 1 sono:
    - $x'yz$, dalla quarta riga

Prima Forma Canonica: Esempio (continua)

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, basta guardare solo alle righe della tabella di verita' dove f vale 1 per costruire la prima forma canonica di f!
- I mintemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 1 sono:
  - $x'yz$, dalla quarta riga
  - $xy'z$, dalla sesta riga

Prima Forma Canonica: Esempio (continua)

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, basta guardare solo alle righe della tabella di verita' dove f vale 1 per costruire la prima forma canonica di f!
- I mintemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 1 sono:
  - $x'yz$, dalla quarta riga
  - $xy'z$, dalla sesta riga
  - xyz', dalla settima riga

Prima Forma Canonica: Esempio (continua)

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, basta guardare solo alle righe della tabella di verita' dove f vale 1 per costruire la prima forma canonica di f!
- I mintemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 1 sono:
  - $x'yz$, dalla quarta riga
  - $xy'z$, dalla sesta riga
  - xyz', dalla settima riga
- Dunque l'espressione che rappresenta f in prima canonica e':

$$x'yz + xy'z + xyz'$$

Seconda Forma Canonica: Maxtermini

Maxtermine

Un maxtermine sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine somma $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x_i'$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Seconda Forma Canonica: Maxtermini

Maxtermine

Un maxtermine sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine somma $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x_i'$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Data la configurazione $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$, possiamo costruire il maxtermine $M_{\bar{v}} = y_1 + y_2 \cdots + y_n$, dove $y_i = x_i$ se $v_i = 0$ ed $y_i = x_i'$ se $v_i = 1$ per ogni $i = 1 \ldots n$.

Il maxtermine $M_{\bar{v}}$ e' un'espressione che vale 0 in corrispondenza dell'unica configurazione delle variabili in ingresso $\bar{v}$.

Seconda Forma Canonica: Maxtermini

Maxtermine

Un maxtermine sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine somma $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x_i'$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Data la configurazione $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$, possiamo costruire il maxtermine $M_{\bar{v}} = y_1 + y_2 \cdots + y_n$, dove $y_i = x_i$ se $v_i = 0$ ed $y_i = x_i'$ se $v_i = 1$ per ogni $i = 1 \ldots n$.
Il maxtermine $M_{\bar{v}}$ e' un'espressione che vale 0 in corrispondenza dell'unica configurazione delle variabili in ingresso $\bar{v}$.
$M_{\bar{v}}$ e' detto il maxtermine corrispondente alla configurazioni di variabili $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$.

Seconda Forma Canonica: Maxtermini

Maxtermine

Un maxtermine sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$ e' un termine somma $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ dove $y_i = x_i$ oppure $y_i = x'_i$, per ogni $i = 1 \ldots n$.

Data la configurazione $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$, possiamo costruire il maxtermine $M_{\bar{v}} = y_1 + y_2 \cdots + y_n$, dove $y_i = x_i$ se $v_i = 0$ ed $y_i = x'_i$ se $v_i = 1$ per ogni $i = 1 \ldots n$.
Il maxtermine $M_{\bar{v}}$ e' un'espressione che vale 0 in corrispondenza dell'unica configurazione delle variabili in ingresso $\bar{v}$.
$M_{\bar{v}}$ e' detto il maxtermine corrispondente alla configurazioni di variabili $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$.

Esempio

Sia $\bar{v} = (101)$ una configurazione per le variabili $\{x, y, z\}$. Il maxtermine associato alla configurazione $\bar{v} = (101)$ e' l'espressione $M_{\bar{v}} = x' + y + z'$.
Si noti che $x' + y + z'$ assume valore 0 soltanto se $x = 1, y = 0$ e $z = 1$, ovvero per la sola configurazione di bit in ingresso $\bar{v} = (101)$.

Seconda Forma Canonica (Product of Sums - POS)

Seconda Forma Canonica

Data una funzione booleana $f(x_1, \ldots, x_n)$, la sua rappresentazione in seconda forma canonica e' data dal prodotto di tutti i maxtermini su $x_1, \ldots, x_n$ corrispondenti alle configurazioni delle variabili per cui f assume valore 0.

Seconda Forma Canonica (Product of Sums - POS)

Seconda Forma Canonica

Data una funzione booleana $f(x_1, \ldots, x_n)$, la sua rappresentazione in seconda forma canonica e' data dal prodotto di tutti i maxtermini su $x_1, \ldots, x_n$ corrispondenti alle configurazioni delle variabili per cui f assume valore 0.

- L'applicazione iterativa del teorema di espansione di Shannon (nella sua forma duale) ad una funzione f porta alla sua rappresentazione in seconda forma canonica

Seconda Forma Canonica (Product of Sums - POS)

Seconda Forma Canonica

Data una funzione booleana $f(x_1, \ldots, x_n)$, la sua rappresentazione in seconda forma canonica e' data dal prodotto di tutti i maxtermini su $x_1, \ldots, x_n$ corrispondenti alle configurazioni delle variabili per cui f assume valore 0.

- L'applicazione iterativa del teorema di espansione di Shannon (nella sua forma duale) ad una funzione f porta alla sua rappresentazione in seconda forma canonica
- In pratica, per ricavare un'espressione in seconda forma canonica per una funzione e' sufficiente guardare alle righe della tabella di verita' dove f vale 0!

Seconda Forma Canonica: Esempio

- Si consideri la funzione booleana su x, y, z che vale 1 se esattamente due variabili valgono 1

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- Si consideri la funzione booleana su x, y, z che vale 1 se esattamente due variabili valgono 1
- L'applicazione del teorema di espansione di Shannon (nella sua forma duale) ad $f(x, y, z)$ porta a: $(x + y + z + f(000)) \cdot (x + y + z' + f(001)) \cdot (x + y' + z + f(010)) \cdot (x + y' + z' + f(011)) \cdot (x' + y + z + f(100)) \cdot (x' + y + z' + f(101)) \cdot (x' + y' + z + f(110)) \cdot (x' + y' + z' \cdot f(111))$

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- Si consideri la funzione booleana su x, y, z che vale 1 se esattamente due variabili valgono 1
- L'applicazione del teorema di espansione di Shannon (nella sua forma duale) ad $f(x, y, z)$ porta a: $(x + y + z + f(000)) \cdot (x + y + z' + f(001)) \cdot (x + y' + z + f(010)) \cdot (x + y' + z' + f(011)) \cdot (x' + y + z + f(100)) \cdot (x' + y + z' + f(101)) \cdot (x' + y' + z + f(110)) \cdot (x' + y' + z' \cdot f(111))$
- Utilizzando il fatto che $f(000) = 0$, $f(001) = 1, \ldots,$ $f(111) = 0$ (dalla tabella di verita'!) si deduce la seguente espressione in seconda forma canonica per f:

$$(x+y+z)\cdot(x+y+z')\cdot(x+y'+z)\cdot(x'+y+z)\cdot(x'+y'+z')$$

Seconda Forma Canonica: Esempio

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.
- I maxtemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 0 sono:

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.
- I maxtemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 0 sono:
  - $x + y + z$, dalla prima riga

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.
- I maxtemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 0 sono:
  - $x + y + z$, dalla prima riga
  - $x + y + z'$, dalla seconda riga

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.
- I maxtemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 0 sono:
  - $x + y + z$, dalla prima riga
  - $x + y + z'$, dalla seconda riga
  - $x + y' + z$, dalla terza riga

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.
- I maxtemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 0 sono:
  - $x + y + z$, dalla prima riga
  - $x + y + z'$, dalla seconda riga
  - $x + y' + z$, dalla terza riga
  - $x' + y + z$, dalla quinta riga

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.
- I maxtemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 0 sono:
  - $x + y + z$, dalla prima riga
  - $x + y + z'$, dalla seconda riga
  - $x + y' + z$, dalla terza riga
  - $x' + y + z$, dalla quinta riga
  - $x' + y' + z'$ dall'ultima riga

Seconda Forma Canonica: Esempio

x	y	z	f(x y z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- In pratica, per la seconda forma canonica, sara' necessario guardare solo le righe della tabella dove f vale 0!.
- I maxtemini associati alle configurazioni per cui la funzione vale 0 sono:
  - $x + y + z$, dalla prima riga
  - $x + y + z'$, dalla seconda riga
  - $x + y' + z$, dalla terza riga
  - $x' + y + z$, dalla quinta riga
  - $x' + y' + z'$ dall'ultima riga
- Dunque l'espressione che rappresenta f in seconda forma canonica e':

$$(x+y+z)\cdot(x+y+z')\cdot(x+y'+z)\cdot(x'+y+z)\cdot(x'+y'+z')$$

Riferimenti

- Capitolo 2 del libro di testo: C. Bolchini et al. *Reti Logiche* Maggioli Editore.
  - Lezione 2: Sezione 2.3
  - Lezione 3: Sezioni 2.4, 2.5.

Esercizi

- Si definisca la tabella di verita' della funzione booleana $f : B^3 \to B$ che assume valore 1 soltanto se almeno due bit in ingresso hanno valore 0.
- Si rappresenti f mediante un'espressione booleana in prima forma canonica
- Si rappresenti f' mediante un'espressione booleana in seconda forma canonica