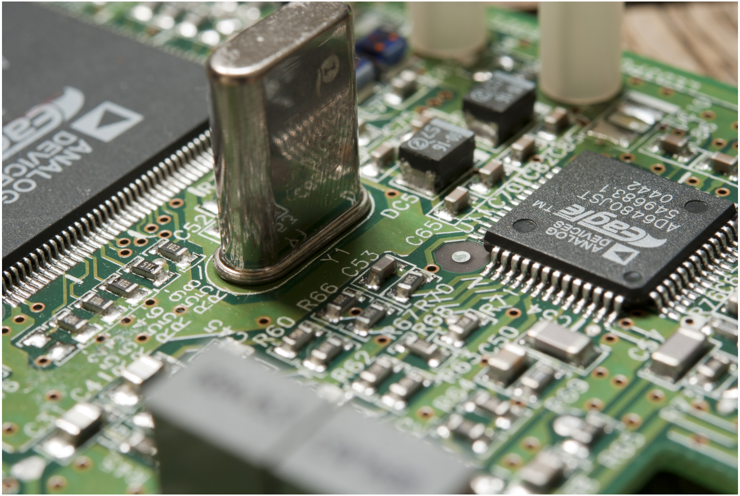
Logica e Reti Logiche

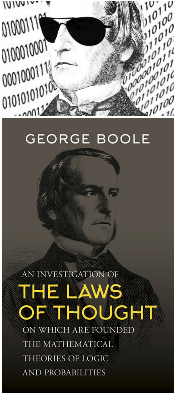
Raffaella Gentilini

September 2, 2022

Da Boole a Shannon

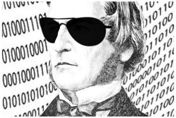

ANALOG DEVICES
ANALOG DEVICES
Y1
C53
R66
R60
C65
DC5

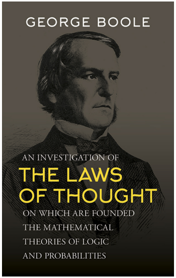
Algebra di Boole



- Introdotta da George Boole nel XIX secolo, al fine di dimostrare affermazioni logiche svolgendo calcoli algebrici.

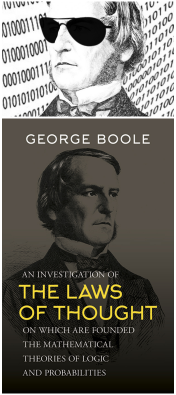
Algebra di Boole





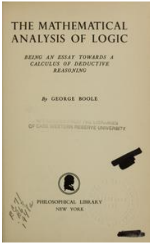
- Introdotta da George Boole nel XIX secolo, al fine di dimostrare affermazioni logiche svolgendo calcoli algebrici.
- Il campo di applicazione dell'algebra di Boole e' molto vasto

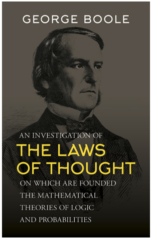
Algebra di Boole



- Introdotta da George Boole nel XIX secolo, al fine di dimostrare affermazioni logiche svolgendo calcoli algebrici.
- Il campo di applicazione dell'algebra di Boole e' molto vasto
- Nella prima parte del corso (reti logiche) sara' utilizzata come modello matematico per la sintesi e l'analisi di sistemi digitali

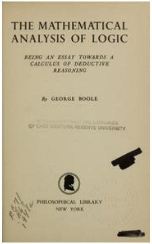
George Boole (1815-1864)

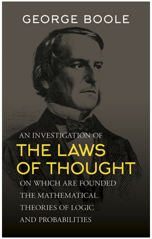




Opere di George Boole (del 1947 e 1954, rispettivamente) che introducono una nuova concezione della logica rispetto al passato:

George Boole (1815-1864)





Opere di George Boole (del 1947 e 1954, rispettivamente) che introducono una nuova concezione della logica rispetto al passato:

"la logica [dichiara Boole] non ha niente a che vedere con la Filosofia, con lo studio dell'esistenza reale e la ricerca della cause. Non dobbiamo associare la logica alla metafisica, ma alla matematica."

Algebra di Boole: Definizione

Definizione [Algebra di Boole]

Si dice algebra di Boole una struttura algebrica definita dalla tupla:

$$\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

tale che valgono gli assiomi che seguono (Postulati di Huntington):

Algebra di Boole: Definizione

Definizione [Algebra di Boole]

Si dice algebra di Boole una struttura algebrica definita dalla tupla:

$$\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

dove:

- A e' l'insieme degli elementi su cui l'algebra opera, detto supporto dell'algebra

tale che valgono gli assiomi che seguono (Postulati di Huntington):

Algebra di Boole: Definizione

Definizione [Algebra di Boole]

Si dice algebra di Boole una struttura algebrica definita dalla tupla:

$$\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

dove:

- A e' l'insieme degli elementi su cui l'algebra opera, detto supporto dell'algebra
- $+$ e' l'operatore booleano di disgiunzione (OR)

tale che valgono gli assiomi che seguono (Postulati di Huntington):

Algebra di Boole: Definizione

Definizione [Algebra di Boole]

Si dice algebra di Boole una struttura algebrica definita dalla tupla:

$$\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

dove:

- A e' l'insieme degli elementi su cui l'algebra opera, detto supporto dell'algebra
- $+$ e' l'operatore booleano di disgiunzione (OR)
- $\cdot$ e' l'operatore booleano di congiunzione (AND)

tale che valgono gli assiomi che seguono (Postulati di Huntington):

Algebra di Boole: Definizione

Definizione [Algebra di Boole]

Si dice algebra di Boole una struttura algebrica definita dalla tupla:

$$\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

dove:

- A e' l'insieme degli elementi su cui l'algebra opera, detto supporto dell'algebra
- $+$ e' l'operatore booleano di disgiunzione (OR)
- $\cdot$ e' l'operatore booleano di congiunzione (AND)
- $'$ e' l'operatore unario di complementazione (NOT)

tale che valgono gli assiomi che seguono (Postulati di Huntington):

Algebra di Boole: Definizione

Definizione [Algebra di Boole]

Si dice algebra di Boole una struttura algebrica definita dalla tupla:

$$\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

dove:

- A e' l'insieme degli elementi su cui l'algebra opera, detto supporto dell'algebra
- $+$ e' l'operatore booleano di disgiunzione (OR)
- $\cdot$ e' l'operatore booleano di congiunzione (AND)
- $'$ e' l'operatore unario di complementazione (NOT)
- 0 e' l' elemento neutro rispetto a $+$

tale che valgono gli assiomi che seguono (Postulati di Huntington):

Algebra di Boole: Definizione

Definizione [Algebra di Boole]

Si dice algebra di Boole una struttura algebrica definita dalla tupla:

$$\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

dove:

- A e' l'insieme degli elementi su cui l'algebra opera, detto supporto dell'algebra
- $+$ e' l'operatore booleano di disgiunzione (OR)
- $\cdot$ e' l'operatore booleano di congiunzione (AND)
- $'$ e' l'operatore unario di complementazione (NOT)
- 0 e' l' elemento neutro rispetto a $+$
- 1 e' l'elemento neutro rispetto a $\cdot$

tale che valgono gli assiomi che seguono (Postulati di Huntington):

Postulati di Huntington

Postulati di Huntington

- congiunzione e disgiunzione sono commutative
  - $\forall a, b \in A : a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$

Postulati di Huntington

- congiunzione e disgiunzione sono commutative
  - $\forall a, b \in A : a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$
- esistono un elemento neutro rispetto a $+$ (indicato con 0) ed un elemento neutro rispetto a $\cdot$ (indicato con 1) tali che, per ogni $a \in A$, $a + 0 = a$ ed $a \cdot 1 = a$

Postulati di Huntington

- congiunzione e disgiunzione sono commutative
  - $\forall a, b \in A : a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$
- esistono un elemento neutro rispetto a $+$ (indicato con 0) ed un elemento neutro rispetto a $\cdot$ (indicato con 1) tali che, per ogni $a \in A$, $a + 0 = a$ ed $a \cdot 1 = a$
- operazioni binarie $+$ e $\cdot$ sono distributive l'una rispetto all'altra:
  - $\forall a, b, c \in A : a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
    $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Postulati di Huntington

- congiunzione e disgiunzione sono commutative
  - $\forall a, b \in A : a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$
- esistono un elemento neutro rispetto a $+$ (indicato con 0) ed un elemento neutro rispetto a $\cdot$ (indicato con 1) tali che, per ogni $a \in A$, $a + 0 = a$ ed $a \cdot 1 = a$
- operazioni binarie $+$ e $\cdot$ sono distributive l'una rispetto all'altra:
  - $\forall a, b, c \in A : a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
    $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- per ogni $a \in A$ esiste ed e' unico un complemento a' tale che $a + a' = 1$ ed $a \cdot a' = 0$

Principio di Dualita'

Dalla commutativita' di $+$, $\cdot$ e dall'esistenza dei rispettivi elementi neutri deriva il principio di dualita':

Principio di Dualita'

Dalla commutativita' di $+$, $\cdot$ e dall'esistenza dei rispettivi elementi neutri deriva il principio di dualita':

Principio di Dualita'

Ogni proposizione derivata dagli assiomi di Huntington di un'algebra di Boole rimane valida scambiando ovunque tra di loro le operazioni $+$ e $\cdot$ e gli elementi neutri 0 ed 1.

Algebra di Boole: Esempi (I)

Sia A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti[a] di A. Si puo' verificare che $\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A \rangle$ e' un'algebra di Boole. Infatti:

[a] $\mathcal{P}(A)$ contiene tutti i sottoinsiemi di A

Algebra di Boole: Esempi (I)

Sia A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti[a] di A. Si puo' verificare che $\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A \rangle$ e' un'algebra di Boole. Infatti:

- $\cup$ e $\cap$ sono commutative

[a] $\mathcal{P}(A)$ contiene tutti i sottoinsiemi di A

Algebra di Boole: Esempi (I)

Sia A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti[a] di A. Si puo' verificare che $\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, A \rangle$ e' un'algebra di Boole. Infatti:

- $\cup$ e $\cap$ sono commutative
- $\emptyset$ (resp. A) e' l'elemento neutro rispetto a $\cup$ (resp. $\cap$). Infatti, per ogni insieme $X \in A$: $X \cup \emptyset = X$ ed $X \cap A = X$.

[a] $\mathcal{P}(A)$ contiene tutti i sottoinsiemi di A

Algebra di Boole: Esempi (I)

Sia A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti[a] di A. Si puo' verificare che $\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, A \rangle$ e' un'algebra di Boole. Infatti:

- $\cup$ e $\cap$ sono commutative
- $\emptyset$ (resp. A) e' l'elemento neutro rispetto a $\cup$ (resp. $\cap$). Infatti, per ogni insieme $X \in A$: $X \cup \emptyset = X$ ed $X \cap A = X$.
- Si possono utilizzare, ad esempio, i diagrammi di Venn per verificare le proprieta' distributive e l'unicita' del complemento

[a] $\mathcal{P}(A)$ contiene tutti i sottoinsiemi di A

Algebra di Boole: Esempi (I)

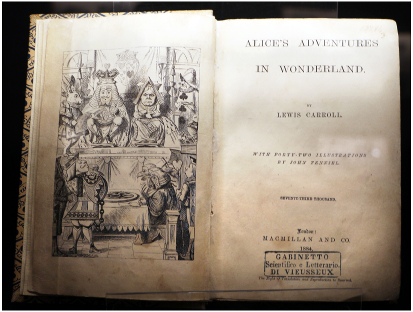
Sia A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti[a] di A. Si puo' verificare che $\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, A \rangle$ e' un'algebra di Boole. Infatti:

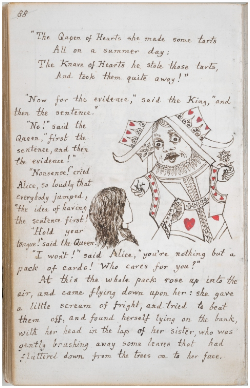
- $\cup$ e $\cap$ sono commutative
- $\emptyset$ (resp. A) e' l'elemento neutro rispetto a $\cup$ (resp. $\cap$). Infatti, per ogni insieme $X \in A$: $X \cup \emptyset = X$ ed $X \cap A = X$.
- Si possono utilizzare, ad esempio, i diagrammi di Venn per verificare le proprieta' distributive e l'unicita' del complemento

[a] $\mathcal{P}(A)$ contiene tutti i sottoinsiemi di A

L'algebra di Boole $\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, A \rangle$, detta algebra delle classi, e' un'algebra di Boole chiusa. Infatti, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$:

- $X \cap Y$, $X \cup Y$ ed $\overline{X} = A \setminus X$ sono sottoinsiemi di A e dunque elementi di $\mathcal{P}(A)$.




88

"The Queen of Hearts she made some tarts
All on a summer day:
The Knave of Hearts he stole those tarts,
And took them quite away!"

"Now for the evidence," said the King, "and then the sentence."
"No!" said the Queen, "first the sentence, and then the evidence!"
"Nonsense!" cried Alice, so loudly that everybody jumped, "the idea of having the sentence first!"
"Hold your tongue!" said the Queen.
"I won't!" said Alice, "you're nothing but a pack of cards! Who cares for you?"
At this the whole pack rose up into the air, and came flying down upon her: she gave a little scream of fright, and tried to beat them off, and found herself lying on the bank, with her head in the lap of her sister, who was gently brushing away some leaves that had fluttered down from the trees on to her face.

La trattazione algebrica della logica di Boole, Lewis Carroll (pseudonimo di C. L. Dodgson), Venn ed altri illustri matematici del diciannovesimo secolo era formulata in termini di classi. I problemi di Carroll trattavano classi quali "entita' capaci di gestire coccodrilli", "anatre che ballano il walzer" e rimangono a tutt'oggi popolari puzzles logici.

Teorema di rappresentazione di Stone

Per ogni algebra di Boole $\mathcal{A}$ finita esiste un insieme (finito) X tale che $\mathcal{A}$ e' isomorfa all'algebra di Boole $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, X \rangle$.

Teorema di rappresentazione di Stone

Per ogni algebra di Boole $\mathcal{A}$ finita esiste un insieme (finito) X tale che $\mathcal{A}$ e' isomorfa all'algebra di Boole $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, X \rangle$.

Conseguenze

Teorema di rappresentazione di Stone

Per ogni algebra di Boole $\mathcal{A}$ finita esiste un insieme (finito) X tale che $\mathcal{A}$ e' isomorfa all'algebra di Boole $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, X \rangle$.

Conseguenze

- la cardinalita' del supporto un'algebra di Boole finita e' sempre una potenza di 2

Teorema di rappresentazione di Stone

Per ogni algebra di Boole $\mathcal{A}$ finita esiste un insieme (finito) X tale che $\mathcal{A}$ e' isomorfa all'algebra di Boole $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, X \rangle$.

Conseguenze

- la cardinalita' del supporto un'algebra di Boole finita e' sempre una potenza di 2
- per dimostrare le algebre di Boole (finite) godono di qualche proprieta' e' sufficiente dismostrare la validita' dell'equivalente di tale proprieta' per l'algebra delle classi (ad esempio, con i diagrammi di Venn)

Algebra di Boole: Esempi (II)

Altri esempi di algebre di Boole sono:

Algebra di Boole: Esempi (II)

Altri esempi di algebre di Boole sono:

- L'algebra $\langle \{0,1\}, min, max, 1-x, 0, 1 \rangle$ e' un'algebra di Boole

Algebra di Boole: Esempi (II)

Altri esempi di algebre di Boole sono:

- L'algebra $\langle \{0, 1\}, min, max, 1 - x, 0, 1\rangle$ e' un'algebra di Boole
- Scambiando le operazioni $+, \cdot$ in un'algebra di Boole $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ si ottiene un'altra algebra di Boole. In altre parole se $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ e' un'algebra di Boole, allora anche $\mathcal{B} = \langle A, \cdot, +, ', 1, 0\rangle$ lo e'.

Algebra di Boole: Esempi (II)

Altri esempi di algebre di Boole sono:

- L'algebra $\langle \{0,1\}, \mathit{min}, \mathit{max}, 1-x, 0, 1\rangle$ e' un'algebra di Boole
- Scambiando le operazioni $+, \cdot$ in un'algebra di Boole $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ si ottiene un'altra algebra di Boole. In altre parole se $\mathcal{B} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ e' un'algebra di Boole, allora anche $\mathcal{B} = \langle A, \cdot, +, ', 1, 0\rangle$ lo e'.
- ...

Variabili Booleane

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ un'algebra di Boole.

Variabili Booleane

- Una variabile booleana e' un simbolo che indica un qualsiasi elemento del supporto A.

Variabili Booleane

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ un'algebra di Boole.

Variabili Booleane

- Una variabile booleana e' un simbolo che indica un qualsiasi elemento del supporto A.
- Il valore di una variabile e' un elemento di A.

Variabili Booleane

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ un'algebra di Boole.

Variabili Booleane

- Una variabile booleana e' un simbolo che indica un qualsiasi elemento del supporto A.
- Il valore di una variabile e' un elemento di A.
- le variabili verranno denotate mediante le ultime lettere dell'alfabeto, ad esempio $x, y, \ldots$, mentre gli elementi del supporto saranno indicati dalle prime lettere dell'alfabeto $a, b, \ldots$ e dai simboli 0 ed 1.

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

- associativa': $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

- associativa': $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- idempotenza: $x + x = x$ e $x \cdot x = x$

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

- associativa': $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- idempotenza: $x + x = x$ e $x \cdot x = x$
- elemento nullo: $x + 1 = 1$ e $x \cdot 0 = 0$

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

- associativa': $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- idempotenza: $x + x = x$ e $x \cdot x = x$
- elemento nullo: $x + 1 = 1$ e $x \cdot 0 = 0$
- unicita' del complemento (o elemento inverso): x' e' unico

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

- associativa': $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- idempotenza: $x + x = x$ e $x \cdot x = x$
- elemento nullo: $x + 1 = 1$ e $x \cdot 0 = 0$
- unicita' del complemento (o elemento inverso): x' e' unico
- assorbimento: $x + x \cdot y = x$ e $x \cdot (x + y) = x$

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

- associativa': $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- idempotenza: $x + x = x$ e $x \cdot x = x$
- elemento nullo: $x + 1 = 1$ e $x \cdot 0 = 0$
- unicita' del complemento (o elemento inverso): x' e' unico
- assorbimento: $x + x \cdot y = x$ e $x \cdot (x + y) = x$
- semplificazione: $x + x' \cdot y = x + y$ e $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$

Proprieta' dell'algebra di Boole (I)

- associativa': $x+(y+z)=(x+y)+z$ e $x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$
- idempotenza: $x+x=x$ e $x \cdot x=x$
- elemento nullo: $x+1=1$ e $x \cdot 0=0$
- unicita' del complemento (o elemento inverso): x' e' unico
- assorbimento: $x+x \cdot y=x$ e $x \cdot (x+y)=x$
- semplificazione: $x+x' \cdot y=x+y$ e $x \cdot (x'+y)=x \cdot y$
- involuzione: $(x')'=x$

Proprieta' dell'algebra di Boole (II)

- Leggi di de Morgan (relazionano somma e prodotto logico)
  - $(x + y)' = x' \cdot y'$
  - $(x \cdot y)' = x' + y'$

Proprieta' dell'algebra di Boole (II)

- Leggi di de Morgan (relazionano somma e prodotto logico)
  - $(x + y)' = x' \cdot y'$
  - $(x \cdot y)' = x' + y'$
- consenso
  - $x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z$
  - $(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z)$

Proprieta' dell'algebra di Boole (II)

- Leggi di de Morgan (relazionano somma e prodotto logico)
  - $(x + y)' = x' \cdot y'$
  - $(x \cdot y)' = x' + y'$
- consenso
  - $x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z$
  - $(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z)$
- E' possibile verificare le proprieta' dell'algebra di Boole elencate utilizzando, ad esempio, i diagrammi di Venn

Proprieta' dell'algebra di Boole: Dimostrazioni

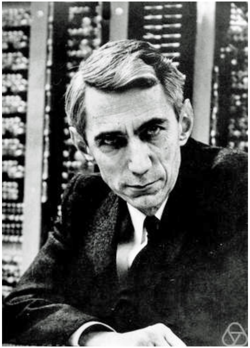
- Le proprieta' appena presentate possono essere dimostrate formalmente utilizzando gli assiomi dell'algebra di booleana.

Proprieta' dell'algebra di Boole: Dimostrazioni

- Le proprieta' appena presentate possono essere dimostrate formalmente utilizzando gli assiomi dell'algebra di booleana.
- Ad esempio, si consideri la seguente dimostrazione della proprieta' di idempotenza:

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &= (x \cdot x) + 0 && \text{elemento neutro} \\
&= (x \cdot x) + (x \cdot x') && \text{complemento} \\
&= x \cdot (x + x') && \textit{distributiva} \\
&= x \cdot 1 && \textit{complemento} \\
&= x
\end{aligned}
$$

Da Boole (1815-1864) a Shannon (1916-2001)



Claude Shannon

Da Boole (1815-1864) a Shannon (1916-2001)

- Nel 1936 Claude Shannon venne assegnato, nell'ambito dei suoi studi universitari di master al MIT (Massachusets Instituto of Technology), a lavorare sull'Analizzatore Differenziale di Bush (calcolatore meccanico per il calcolo di equazioni differenziali).

Da Boole (1815-1864) a Shannon (1916-2001)

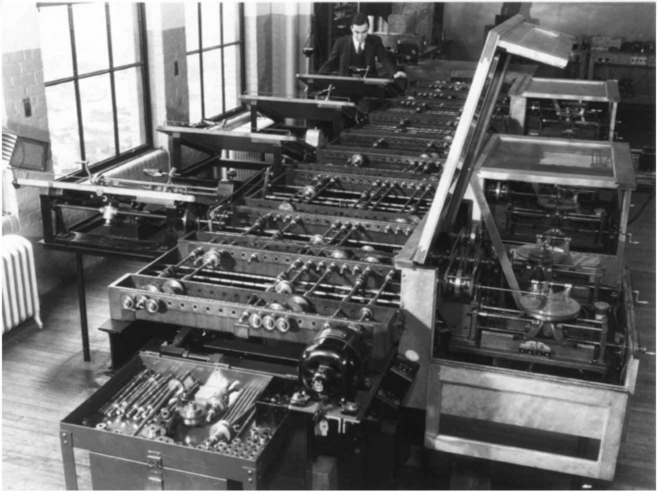
- Nel 1936 Claude Shannon venne assegnato, nell'ambito dei suoi studi universitari di master al MIT (Massachusets Instituto of Technology), a lavorare sull'Analizzatore Differenziale di Bush (calcolatore meccanico per il calcolo di equazioni differenziali).
- All'analizzatore era collegato un circuito composto da oltre cento rele'. Shannon intui' che l'algebra di Boole permetteva di definire un modello formale per l'analisi e la sintesi di un simile sistema.

Da Boole (1815-1864) a Shannon (1916-2001)

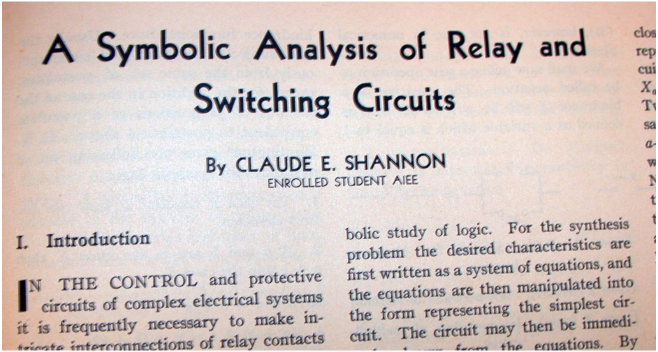
- Nel 1936 Claude Shannon venne assegnato, nell'ambito dei suoi studi universitari di master al MIT (Massachusets Instituto of Technology), a lavorare sull'Analizzatore Differenziale di Bush (calcolatore meccanico per il calcolo di equazioni differenziali).
- All'analizzatore era collegato un circuito composto da oltre cento rele'. Shannon intui' che l'algebra di Boole permetteva di definire un modello formale per l'analisi e la sintesi di un simile sistema.
- In particolare, noto' che due interruttori in serie (risp. parallelo) potevano essere descritti con l'operatore logico AND (risp. OR). L'operatore NOT poteva essere implementato tramite il contatto posteriore di un rele', piuttosto che tramite il contatto anteriore.

Da Boole (1815-1864) a Shannon (1916-2001)

- Nel 1936 Claude Shannon venne assegnato, nell'ambito dei suoi studi universitari di master al MIT (Massachusets Instituto of Technology), a lavorare sull'Analizzatore Differenziale di Bush (calcolatore meccanico per il calcolo di equazioni differenziali).
- All'analizzatore era collegato un circuito composto da oltre cento rele'. Shannon intui' che l'algebra di Boole permetteva di definire un modello formale per l'analisi e la sintesi di un simile sistema.
- In particolare, noto' che due interruttori in serie (risp. parallelo) potevano essere descritti con l'operatore logico AND (risp. OR). L'operatore NOT poteva essere implementato tramite il contatto posteriore di un rele', piuttosto che tramite il contatto anteriore.
- Da questi studi, Claude ricavo' la sua tesi di master, pubblicata nel 1938, in cui mostro' come i simboli logici di Boole potessero essere trattati come una serie di interruttori accesi o spenti, e come l'aritmetica binaria, potesse essere applicata ai circuiti elettrici.



Differential Analizer


A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits

By CLAUDE E. SHANNON
ENROLLED STUDENT AIEE

I. Introduction

IN THE CONTROL and protective circuits of complex electrical systems it is frequently necessary to make intricate interconnections of relay contacts

bolic study of logic. For the synthesis problem the desired characteristics are first written as a system of equations, and the equations are then manipulated into the form representing the simplest circuit. The circuit may then be immediately from the equations. By

Master Thesis of Claude Shannon (MIT, 1938)

Algebra di Commutazione

Nell'analisi dei circuiti fornita da Shannon veniva in particolare utilizzata un'algebra di Boole in cui il supporto e' costituito da due soli valori $\{0,1\}$, detta *Algebra di Commutazione*.

Algebra di Commutazione

Nell'analisi dei circuiti fornita da Shannon veniva in particolare utilizzata un'algebra di Boole in cui il supporto e' costituito da due soli valori $\{0, 1\}$, detta *Algebra di Commutazione*.

Algebra di Commutazione (Switching Algebra)

- Si tratta di un'algebra di Boole il cui supporto e' costituito dai soli volori $\{0, 1\}$:

$$\mathcal{B} = \langle \{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

  dove gli operatori $+, \cdot, '$ sono definiti nella slide che segue.
- Ciascuna variabile puo' assumere i soli valori 0 ed 1

Operatori dell’algebra di commutazione

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

'	
0	1
1	0

OR Esclusivo $\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

- Dal punto di vista algebrico:

$$a \oplus b = a'b + ab'$$

- Sulla base di tale definizione, applicando le proprieta' dell'algebra di Boole si ha:

$$x \oplus 1 = x' \quad x \oplus 0 = x \qquad (1)$$

$$x \oplus x = 0 \quad x \oplus x' = 1 \qquad (2)$$

$$x' \oplus y = x \oplus y' \qquad (3)$$

Riferimenti

- Capitolo 1 (introduzione) del libro di testo: C. Bolchini et al. *Reti Logiche* Maggioli Editore.
- Capitolo 2 del libro di testo: C. Bolchini et al. *Reti Logiche* Maggioli Editore.
  - Sezioni 2.1, 2.2

Esercizi per casa

- Utilizzare i diagrammi di Venn per dimostrare le proprieta' (associativita', idempotenza ...) dell'algebra booleana (su algebre con supporto finito).
- Dimostrare che l'algebra di commutazione e' un'algebra booleana (ovvero verificare la validita' dei postulati di Huntington per l'algebra di commutazione)
- Dimostrare la validita' delle proprieta' di associativita', idempotenza, elemento nullo, unicita' del complemento, assorbimento, semplificazine, involuzione, legge di De Morgan, consenso, implicazione per l'algebra di commutazione